



UM ESTUDO ANALÍTICO-NUMÉRICO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE ORIENTADO À PROBLEMAS TÉRMICOS EM ESTRUTURAS DE CONCRETO

Eliane de Fátima Rodrigues Martins

Lineu José Pedroso

matelianemartins@gmail.com

lineu@unb.br

Doutoranda PECC–UnB, Docente UEG, Faz. Bar. do Meio BR153, nº3105, CEP 75.132-903, Anápolis-GO, e UniEVANGÉLICA, Av. Universitária km3,5 Cidade Universitária, CEP 75.083-515, Anápolis-GO.

UnB-PECC-GDFE. Caixa postal 04492, Campus Darcy Ribeiro, CEP 70.919-970, Brasília - DF.

Abstract. *Uma barragem de concreto está sujeita a receber solicitações em diversas fases e situações de funcionamento durante a sua vida útil. Uma destas fases é referente ao fenômeno de troca de calor presente principalmente em sua etapa construtiva, ocasionado pelo grande volume de concreto mobilizado, onde há a geração de calor provocado pelo fenômeno de hidratação do cimento. Alguns problemas práticos requerem a habilidade do pesquisador em escolher artifícios para determinar uma solução aceitável para os casos reais de interesse. Assim, os problemas térmicos em Engenharia de Barragens, sugerem um tratamento progressivo da questão, onde se possa inserir o conjunto de dificuldades crescentes, a medida que os modelos e soluções se tornam mais complexos. Os efeitos térmicos são capazes de suscitar movimentações no barramento de concreto ou em estruturas hidráulicas acessórias e desencadear fenômenos de interação térmico-mecânico. Problemas esses que podem ser resolvidos por simulações numéricas, como os Métodos dos Elementos Finitos, das Diferenças Finitas (MDF), ou mesmo analiticamente em casos que isso é possível. Neste trabalho, efetua-se uma análise do comportamento térmico de uma placa de concreto massa, sujeita a temperaturas no contorno, como etapa preliminar no tratamento desse problema em barragens de concreto. Serão também apresentadas soluções analíticas construídas ou retiradas da literatura, para serem comparadas com as soluções numéricas obtidas por rotinas computacionais baseadas no MDF, e implementadas no software MatLab.*

Palavras-chave: *Equação de Laplace, Efeitos Térmicos, Concreto, Diferenças Finitas.*

1 INTRODUÇÃO

No final do século XVIII existiam vários métodos para determinar soluções de equações diferenciais ordinárias, e no início do século XIX Joseph Fourier (1768 - 1830) propôs a solução de uma equação diferencial parcial que descreve a distribuição de calor em uma barra, cuja expressão pode ser representada por séries trigonométricas. A série descrita por Fourier possibilitou a obtenção de soluções para outros problemas que possuíam equações diferenciais parciais lineares, (Cindra, Teixeira, 2010).

Alguns métodos foram desenvolvidos e estudados proporcionando a evolução da física matemática. Um método de destaque é o de separação de variáveis (Alves, 2010), que tem sua origem em problemas de vibrações e ondas, estudados por D'Alembert, Daniel Bernoulli e Euler por volta de 1750.

Iniciou-se também as investigações sobre as questões teóricas acerca da existência e unicidade de soluções das equações, alavancou também métodos menos elementares como a expansão em séries de potências no plano complexo. Métodos numéricos também foram impulsionados, porém, foram prejudicados pela falta de agilidade nos cálculos que eram executados de forma manual ou com equipamentos pouco precisos.

Com o advento do computador, com extrema performance a cada momento, muitos problemas de interesse prático em engenharia puderam ser abordados. Por consequência, houve a possibilidade de aliar conceitos de engenharia e matemática e vislumbrar soluções que sejam de interesse da sociedade como um todo.

As estruturas de concreto, tornou-se objeto de muitos estudos em razão da utilidade de suas aplicações. A equação de Laplace representa um estágio inicial importante a ser cumprido, quando procura-se em desenvolver uma metodologia progressiva que busca a solução de problemas mais complexos envolvendo os fenômenos térmicos associados ao concreto.

No que concerne a utilização da equação de Laplace para análise dos efeitos térmicos em estruturas de concreto, vários autores tem se dedicado a essa temática na literatura, a saber: Mamede (2016), Coelho (2015), Martins (2016), Hickmann, Gramani, Kaviski, Garcia, (2015).

Focarão nesse trabalho a exposição de soluções analíticas para uma das variações da equação de calor - a equação de Laplace - com condições de contorno pré definidas, mas, mediante a dificuldade de adaptação das exigências matemáticas ao contexto real aproveitaram-se dos recursos computacionais do *software* MatLab para a elaboração de uma *function* que execute a computação algébrica necessária a aplicação do Método das Diferenças Finitas (MDF) à problemas de transferência de calor em estruturas de concreto.

As rotinas implementadas permitem a alteração e remodelagem do código pelo usuário, possibilitam a representação gráfica bi e tri dimensionais das saídas dos resultados, há exposição agrupada em tabelas dos dados de um problema com o intuito de facilitar a análise e tomada de decisões para cada aplicação.

2 PROBLEMÁTICA

Em face a necessidade de soluções para os problemas do contexto real diversos cientistas tem estudado sobre os conceitos matemáticos referente as equações diferenciais. É possível exibir regiões e descrever como é o comportamento da solução, porém, não sabemos qual é a expressão analítica desta solução. Visto que a teoria nos certifica da existência e unicidade de solução em determinada região sob certas restrições.

Há, em alguns casos, uma complexidade da aplicação da ciência matemática em resolver alguns dos fenômenos reais. Os requisitos necessários para exibir soluções analíticas, descritas na literatura, as vezes não são satisfeitos pelos modelos. Dessa forma entram em cena os métodos numéricos e a agilidade dos recursos computacionais para auxiliar na solução e análise dos modelos que representam o contexto real e possuem semelhanças com as soluções analíticas.

A modelagem de problemas reais é descrita por relações entre as variáveis que aparecem no fenômeno ora observado, e que podem ser frequentemente expressas por relações entre a função e suas derivadas, que por sua vez há possibilidade de serem modelados por uma equação diferencial.

3 METODOLOGIA

O objetivo central da pesquisa foi explorar na literatura as soluções analíticas à equação de calor, simplificada para o caso permanente - equação de Laplace - e promover a construção de uma metodologia baseada no Método das Diferenças Finitas para análise qualitativa de problemas que são governados pela equação do calor.

É necessário identificar e descrever ferramentas do *software* MatLab que podem auxiliar no desenvolvimento de competências de utilização de algumas das estruturas e conceitos de equações diferenciais parciais e ordinárias e visualização gráfica em espaços bi e tri dimensionais.

Cervo (2002) assevera que "procura descobrir, com precisão possível, a frequência com que um fenômeno ocorre, sua relação e conexão com outros, sua natureza e características", portanto, ao utilizar esta metodologia, pretendiam valorizar o estudo através da descoberta e comparação de situações do contexto que envolve a matemática.

Trataram de buscar a confrontação da teoria de soluções analíticas da equação de calor com a prática de forma científica. Dessa forma, buscaram na metodologia descritiva, subsídios que contribuíram na elaboração da *function* no MatLab.

A investigação foi dividida em três partes: a primeira, de caráter bibliográfico, com o propósito de formalizar o marco teórico sobre a equação de calor. A segunda, de caráter exploratório e descritivo das funcionalidades e formas de utilização do *software* MatLab. E a terceira elaborar, executar e analisar os dados de saída da *function* aplicada a equação de calor em sua versão permanente - equação de Laplace

4 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

De acordo com Iório (1971) e outros pesquisadores na literatura a equação geral que rege a condução de calor em um corpo sólido ortotrópico¹ pode ser expressão pela igualdade (1):

$$k \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{q} = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

¹ Um material é ortotrópico se suas propriedades térmicas são únicas e independentes nas três direções mutuamente perpendiculares.

Na Eq. (1) a função $T(x, y, z)$ apresenta a temperatura do corpo, k representa a condutividade térmica, \dot{q} é a geração de calor interno, e $\alpha = \frac{k}{\rho \cdot c}$ é denominado de difusividade.

Considerando que a Eq. (1) é a equação completa de calor, para o concreto massa implica na determinação de parâmetros de natureza complexa que são obtidos experimentalmente. Como uma etapa inicial para o tratamento dessa questão nesse trabalho aborda-se apenas o problema estacionário e sem geração de calor, fato que simplifica a Eq. (1) tornando a equação de Laplace.

A Tabela 1 exibe parte de um resumo disponibilizado em Coelho (2013), é a exposição da solução analítica para equação de Laplace bi dimensional.

Tabela 1. Solução analítica para a equação de Laplace. Coelho (2016).

Equação Diferencial	Condições de Contorno	Solução Analítica
$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$	$T(x, 0) = f_1(x)$ $T(L; y) = 0$ $T(x, H) = 0$ $T(0; y) = 0$	$T_A(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[A_n \cdot \text{sen} \left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} \right) \cdot \left[e^{\frac{n \cdot \pi \cdot y}{L}} - e^{\frac{n \cdot \pi \cdot (2 \cdot H - y)}{L}} \right] \right]$ $A_n = \frac{2}{L} \cdot \frac{1}{1 - e^{\frac{2 \cdot n \cdot \pi \cdot H}{L}}} \cdot \int_0^L \left[f_1(x) \cdot \text{sen} \left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} \right) \cdot dx \right]$
	$T(x, 0) = 0$ $T(L; y) = g_1(y)$ $T(x, H) = 0$ $T(0; y) = 0$	$T_B(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[B_n \cdot \text{senh} \left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{H} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{H} \right) \right]$ $B_n = \frac{2}{H} \cdot \frac{1}{\text{senh} \left(\frac{n \cdot \pi \cdot L}{H} \right)} \cdot \int_0^H \left[g_1(y) \cdot \text{sen} \left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{H} \right) \cdot dy \right]$
	$T(x, 0) = 0$ $T(L; y) = 0$ $T(x, H) = f_2(x)$ $T(0; y) = 0$	$T_C(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[C_n \cdot \text{sen} \left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} \right) \cdot \text{senh} \left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{L} \right) \right]$ $C_n = \frac{2}{L} \cdot \frac{1}{\text{senh} \left(\frac{n \cdot \pi \cdot H}{L} \right)} \cdot \int_0^L \left[f_2(x) \cdot \text{sen} \left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} \right) \cdot dx \right]$
	$T(x, H) = 0$ $T(L; y) = 0$ $T(x; 0) = 0$ $T(0; y) = g_2(y)$	$T_D(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[D_n \cdot \text{sen} \left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{H} \right) \cdot \left[e^{\frac{n \cdot \pi \cdot x}{H}} - e^{\frac{n \cdot \pi \cdot (2 \cdot L - x)}{H}} \right] \right]$ $D_n = \frac{2}{H} \cdot \frac{1}{1 - e^{\frac{2 \cdot n \cdot \pi \cdot L}{H}}} \cdot \int_0^H \left[g_2(y) \cdot \text{sen} \left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{H} \right) \cdot dy \right]$
	$T(x, H) = f_1(x)$ $T(L, y) = g_1(y)$ $T(x; 0) = f_2(x)$ $T(0; y) = g_2(y)$	$T(x, y) = T_A(x, y) + T_B(x, y) + T_C(x, y) + T_D(x, y)$

Contudo, foi necessário adaptar ao contexto real, dessa forma entram em cena os métodos numéricos, essa pesquisa utiliza-se do Método das Diferenças Finitas, que pontualmente no domínio aproxima as derivadas de uma função linear.

5 MÉTODOS DE SOLUÇÃO

Segundo Burden (2003) o Método das Diferenças Finitas (MDF) apresenta características de estabilidade em relação a outros métodos, apesar de geralmente requerer mais computação para obter a precisão especificada.

O MDF é um artifício capaz de transformar um problema de equações diferenciais em um problema algébrico, que substitui as derivadas na equação por uma aproximação de quociente de diferenças adequada, permite que o quociente e os parâmetros sejam escolhidos para manter uma determinada ordem do erro de truncamento.

O Método das Diferenças Finitas é um suporte numérico prático para avaliar o valor de uma função em domínios discretizados.

Mostra-se na Tabela 2 as expressões de substituição das derivadas de primeira e segunda ordens de uma função $T = T(x, y, z)$, por diferenças segundo o MDF, e de acordo com Szilard (1974), Pedroso (2005, 2011) e Martins (2016).

Tabela 2. Expressões derivadas de 1ª e 2ª ordens com o MDF.

Eixos	Derivadas	
	1ª ordem	2ª ordem
X	$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta x}$	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,j,l} - 2T_{i,j,l} + T_{i-1,j,l}}{(\Delta x)^2}$
Y	$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T_{j+1} - T_{j-1}}{y_{j+1} - y_{j-1}} = \frac{T_{j+1} - T_{j-1}}{2\Delta y}$	$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j+1,l} - 2T_{i,j,l} + T_{i,j-1,l}}{(\Delta y)^2}$
Z	$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{T_{k+1} - T_{k-1}}{z_{k+1} - z_{k-1}} = \frac{T_{k+1} - T_{k-1}}{2\Delta z}$	$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{T_{i,j,l+1} - 2T_{i,j,l} + T_{i,j,l-1}}{(\Delta z)^2}$

A pesquisa apresenta uma formulação numérica, com o MDF, para resolução da equação de Laplace, $\nabla u^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, em uma placa de dimensões $L \times H$. Considerou-se que $0 \leq x \leq L$ e que $0 \leq y \leq H$, e a origem do sistema de coordenadas cartesiano ficou definida no canto inferior esquerdo da placa.

O eixo x foi dividido em $n-1$ subintervalos, e o eixo y em $m-1$ subintervalos, dessa forma obteve-se que o comprimento de cada subintervalo nos eixos x e y é dado respectivamente, por $\Delta x = \frac{L}{n}$ e $\Delta y = \frac{H}{m}$. Consequentemente a malha gerada contém os pontos $(x_i; y_j)$ onde $i = 1, 2, 3, \dots, n$ e $j = 1, 2, 3, \dots, m$.

Aplicando as equações da Tabela 2 na equação de Laplace, conclui-se que a diferença dividida para os termos da Equação de Laplace no ponto $(x_i; y_j)$ são iguais as parcelas

$$\frac{\partial^2 T(x_i; y_j)}{\partial x^2} = \frac{1}{(\Delta x)^2} [T(x_{i+1}; y_j) - 2T(x_i; y_j) + T(x_{i-1}; y_j)] \text{ e } \frac{\partial^2 T(x_i; y_j)}{\partial y^2} = \frac{1}{(\Delta y)^2} [T(x_i; y_{j+1}) - 2T(x_i; y_j) + T(x_i; y_{j-1})]$$

O erro de truncamento de cada uma das parcelas pode ser avaliado respectivamente, pelas igualdades $O((\Delta x)^2) = -\frac{(\Delta x)^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 T(\xi_i; y_j)}{\partial x^4}$ com $\xi_i \in]x_{i-1}; x_{i+1}[$ e $O((\Delta y)^2) = -\frac{(\Delta y)^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 T(x_i; \eta_j)}{\partial y^4}$ com $\eta_j \in]y_{j-1}; y_{j+1}[$.

Reorganizando os termos da Equação de Laplace com as aproximações por MDF assume a seguinte forma, $\frac{1}{(\Delta x)^2} [T(x_{i+1}; y_j) - 2T(x_i; y_j) + T(x_{i-1}; y_j)] + \frac{1}{(\Delta y)^2} [T(x_i; y_{j+1}) - 2T(x_i; y_j) + T(x_i; y_{j-1})] = 0$, onde $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ e $j = 1, 2, 3, \dots, m-1$, e com erro de truncamento igual a $O((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) = -\frac{(\Delta x)^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 T(\xi_i; y_j)}{\partial x^4} - \frac{(\Delta y)^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 T(x_i; \eta_j)}{\partial y^4}$.

Para simplificar a notação considera-se $l = i + (m-1-j) \cdot (n-1)$ os pontos $P_l = (x_i, y_j)$ e $T_{ij} = T(P_l) = T(x_i, y_j)$, onde $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ e $j = 1, 2, 3, \dots, m-1$, ainda temos que $l = 1, 2, \dots, (n-1) \cdot (m-1)$, representando $(n-1) \cdot (m-1)$ pontos na malha. Dessa forma a discretização da equação de Laplace com essa nova notação é expressa pela igualdade da Eq. 2.

$$2 \left(\left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 + 1 \right) T_{i,j} - (T_{i+1,j} + T_{i-1,j}) - \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 (T_{i,j+1} + T_{i,j-1}) = 0. \quad (2)$$

A notação utilizada na Eq. (2) favorece a programação no *software* MatLab, pois, pode-se reescrevê-la isolando o termo $T_{i,j}$ para o processo iterativo, outro ponto positivo é que o comprimento de cada subintervalo nos eixos coordenados podem ser distintos.

6 RESULTADOS

Com a Eq. (2) e alguns recursos do *software* MatLab (Hanselman, Littlefield, 1999) elaborou-se inicialmente quatro programas denominados de *function*, com os nomes comp1borda, comp2borda, comp3borda e comp4borda, que recebem como dados de entrada as dimensões da placa, comprimento L e largura H, a quantidade k de termos na solução analítica dada em série, e o valor da temperatura em três bordas distintas da placa.

Considerou-se o sistema de referência com origem no canto superior da placa, e o eixo x sobre o comprimento e o y sobre a largura, de acordo com a Fig. 1.



Figura 1. Sistema de coordenadas bi dimensional

Definiu-se uma orientação cíclica para o tratamento dos dados em cada arquivo *function*. É crescente no sentido horário, e no arquivo cuja borda é não nula é identificado pelo número no nome do programa. Considerou-se também, que nessa borda a função utilizada é uma senóide, porém, pode ser substituída a critério do usuário.

Os pontos que estão na borda sobre o eixo x , $y = 0$, possuem temperatura designadas pela variável T_1 , e seguindo o padrão cíclico horário, identificou-se por T_2 os pontos sobre a borda paralela ao eixo y , $x = L$, borda paralela ao eixo x , T_3 , com $y = H$, e por fim, T_4 , a borda sobre o eixo y , $x = 0$, são considerados como dados de entrada e seus valores devem ser inseridos quando a *function* é executada.

Determinou-se que a análise numérica deveria ser observada sobre os pontos de quatro malhas com 3, 5, 9 e 17 pontos sobre os eixos coordenados. As dimensões da placa foram subdivididas em comprimentos Δx e Δy . Uma malha possui comprimento do subintervalo igual a metade do comprimento da malha anterior, observando a quantidade de pontos na malha, dessa forma tem-se que $\Delta x = \frac{L}{2}, \frac{L}{2^2}, \frac{L}{2^3}, \frac{L}{2^4}$ e $\Delta y = \frac{H}{2}, \frac{H}{2^2}, \frac{H}{2^3}, \frac{H}{2^4}$.

Esses critérios aliados com a solução analítica para a equação de Laplace e com condições de contorno definidas exibe-se o gráfico de cada uma das quatro malhas. A Fig. 2 exibe as malhas que possuem 9, 25, 81 e 289 pontos. Utiliza-se o MDF para determinar o valor da temperatura em cada ponto de cada uma das malhas.

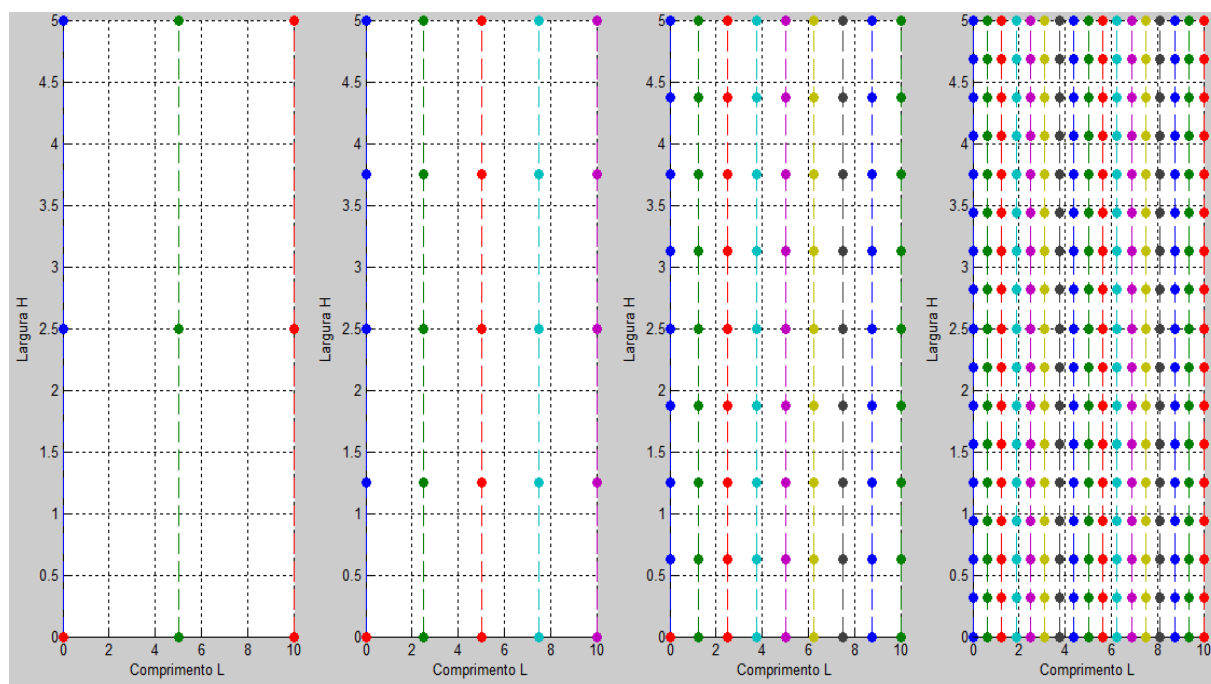


Figura 2 - Discretização do domínio com 9, 25, 81 e 289 pontos.

A *function* expõe a visualização gráfica das malhas, Figura 2, fato que oportuniza aferir que como os valores atribuídos para a dimensão da placa são fixos a medida que a distância entre os pontos diminui há um acréscimo na quantidade de termos em cada eixo, o que em determinado momento ocasiona o preenchimento total da malha do ponto de vista discreto.

Na Fig. 3 é exposto o valor da temperatura obtida pelo MDF em imagem tridimensional colorida e é a representação da superfície, porém, os pontos são unidos por segmentos de retas, o que assemelha-se a uma rede de pesca.

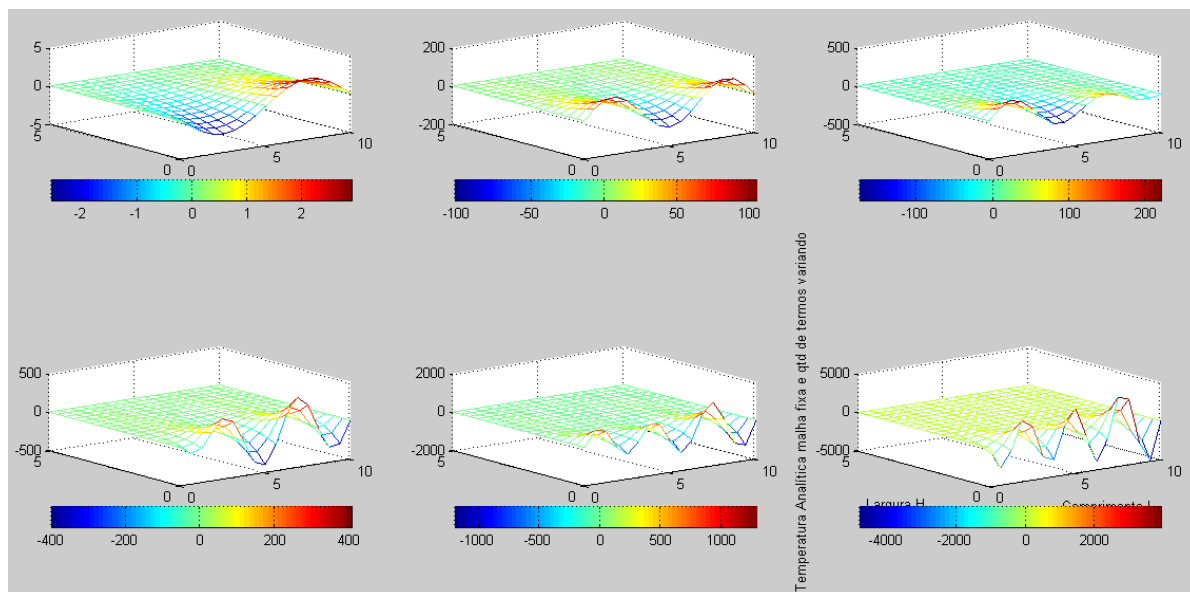


Figura 3. Temperatura analítica malha fixa e quantidade de termos variando.

A Fig. 3 apresenta algumas das possibilidades de janelas gráficas que servem de suporte para aferir conclusões no que tange sobre as regiões de crescimento e decrescimento do valor da temperatura ao longo dos pontos de cada malha. Quantos termos na série são necessários para obter um modelo satisfatório e que se adapte ao contexto ora aplicado.

A execução da *function* oferece a exposição de dados agrupados numa tabela, e listados como na Fig. 4. Exibe as dimensões da placa, para cada uma das quatro malhas o valor da subdivisão e a quantidade de pontos em cada uma.

```

=====Descrição das Malhas=====
-----Dimensões da Placa-----Coordenadas do Centro da Placa-----
      10.0000      5.0000      5.0000      2.5000

=====
-----delx-----dely-----Qtd de Pontos-----
=====
      5.0000      2.5000      9.0000
      2.5000      1.2500     25.0000
      1.2500      0.6250     81.0000
      0.6250      0.3125    289.0000

=====
-----Coordenadas dos Pontos da borda em cada Malha-----
--Malha 1 (x,y)--Malha 2 (x,y)--Malha 3 (x,y)--Malha 4 (x,y)--
      0          0          0          0          0          0          0          0
      5.0000     2.5000     2.5000     1.2500     1.2500     0.6250     0.6250     0.3125
     10.0000     5.0000     5.0000     2.5000     2.5000     1.2500     1.2500     0.6250
      0          0       7.5000     3.7500     3.7500     1.8750     1.8750     0.9375
      0          0      10.0000     5.0000     5.0000     2.5000     2.5000     1.2500
      0          0          0          0       6.2500     3.1250     3.1250     1.5625
      0          0          0          0       7.5000     3.7500     3.7500     1.8750
      0          0          0          0       8.7500     4.3750     4.3750     2.1875
      0          0          0          0      10.0000     5.0000     5.0000     2.5000
      0          0          0          0          0          0       5.6250     2.8125
      0          0          0          0          0          0       6.2500     3.1250
      0          0          0          0          0          0       6.8750     3.4375
      0          0          0          0          0          0       7.5000     3.7500
      0          0          0          0          0          0       8.1250     4.0625
    
```

Figura 4. Informações das malhas gerados com o *software* MatLab

Mostra-se na Fig. 5 as coordenadas (x, y) dos pontos da malha com 9 pontos, o valor da temperatura tanto pelo MDF como da solução analítica com $k, k+1, k+2, k+3, k+4$ e $k+5$ termos na série, e também é possível apresentar a expressão dessas soluções analíticas.

```
=Dados temperatura MDF e analítico k,...,k+5 termos com a malha 1==
== (x,y) --MDF--A-k---A-k+1---A-k+2---A-k+3---A-k+4---A-k+5-----=
1.0e+003 *
```

Columns 1 through 8

0	0	0	0	0	0	0	0
0.0050	0	-0.0010	0.0002	-0.1029	-0.1029	-0.4030	-0.4030
0.0100	0	-0.0005	0	0	0	0	0
0	0.0025	0	0	0	0	0	0
0.0050	0.0025	-0.0001	0.0001	-0.0096	-0.0096	-0.0155	-0.0155
0.0100	0.0025	0	0	0	0	0	0
0	0.0050	0	0	0	0	0	0
0.0050	0.0050	0	0	0	0	0	0
0.0100	0.0050	0	0	0	0	0	0

Figura 5. Coordenadas dos pontos da malha com 9 pontos e o valor da temperatura numérico e analítico

É importante ressaltar que na Fig. 5 os dados são apresentados apenas para a malha com 9 elementos, porém, a *function* descreve tabelas semelhantes para cada uma das quatro malhas. Essa forma de apresentação certifica ao usuário a observação e comparação para cada ponto (x, y) da malha o valor da temperatura calculada com o MDF e com a solução analítica com $k, k+1, k+2, k+3, k+4$ e $k+5$ termos na série.

A Fig. 6 possibilita visualizar graficamente as curvas de nível da temperatura determinada pelo MDF, e o gradiente em cada um dos pontos da malha, evidência a direção de crescimento da temperatura.

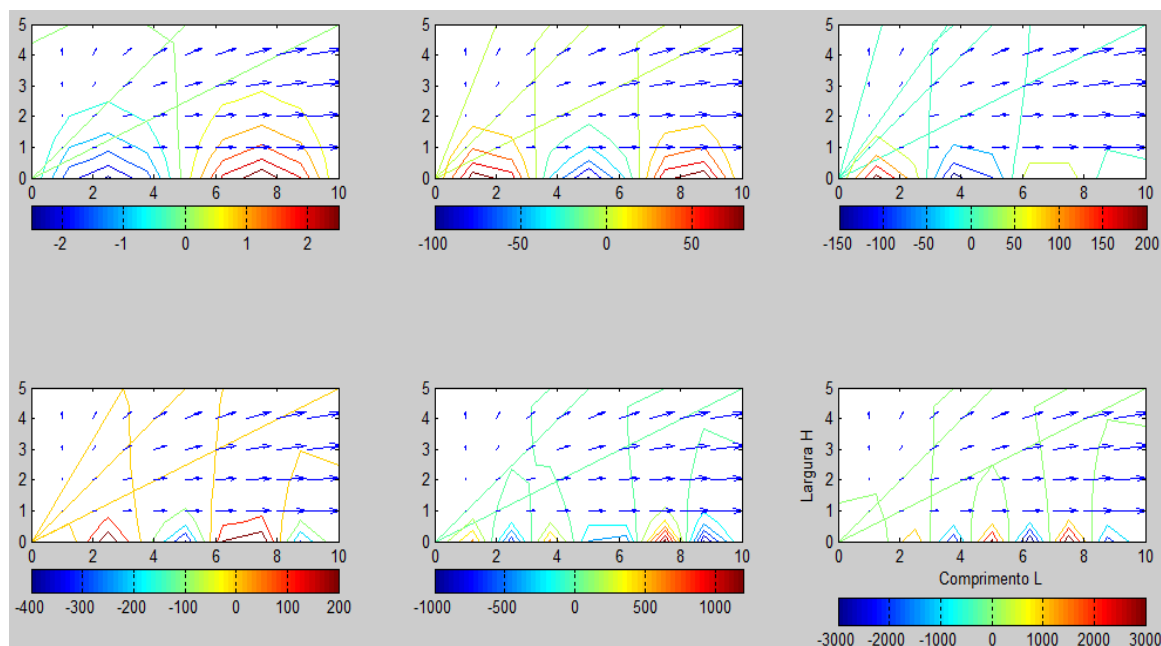


Figura 6. Representação gráfica bi dimensional do vetor gradiente.

Essa abordagem permitiu avaliar que a cada três pontos da superfície considerando uma direção fixa, a curva interseção é descrita por uma parábola, em conformidade ao que se discutiu, previa-se e fora demonstrado anteriormente (Coelho, 2013 e Pedroso, 2015).

Dessa forma a superfície gerada pelos pontos $(x, y, T(x, y))$ descreve a evolução da temperatura ao longo dos pontos da malha. Quando observa-se a curva obtida da interseção entre essa superfície e planos ora paralelos ao plano $x=\text{constante}$ ora por planos paralelos ao plano $y=\text{constante}$, percebe-se que a curva tem comportamento de uma parábola.

Considere uma placa com dimensões L e H , nas direções do eixo x e eixo y , respectivamente, e uma partição dos eixos coordenados, x e y , onde cada subintervalo possui comprimento igual a $\Delta x = \frac{L}{2^n}$ e $\Delta y = \frac{H}{2^n}$, respectivamente, e n é a quantidade de pontos entre os extremos dos eixos coordenados.

A Fig.7 exibe uma superfície e as curvas interseções com os planos $x = x_2$ e $y = y_2$. Observa-se que as curvas nesses planos passam a depender de somente uma variável, no plano $x = x_2$ a curva é função somente da variável y e é constituída pelos pontos na forma $(x_2, y, T(x_2, y))$, de modo semelhante no plano $y = y_2$ a curva é função somente da variável x e é constituída pelos pontos na forma $(x, y_2, T(x, y_2))$.

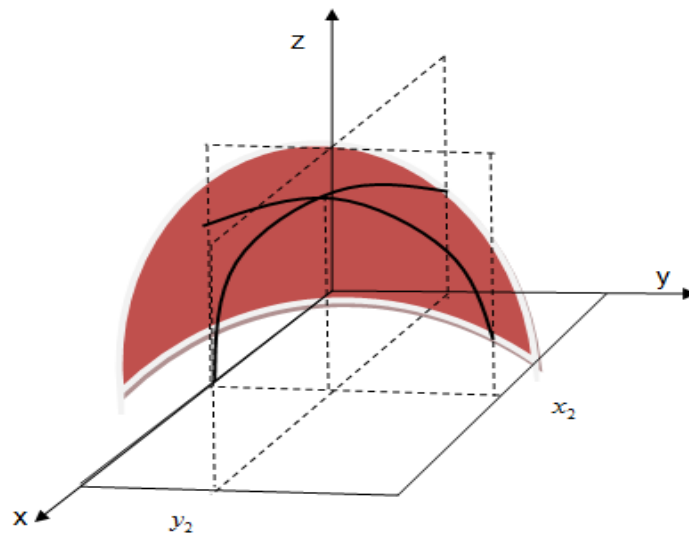




Figura 7. Curvas $x=\text{constante}$ e $y=\text{constante}$.

Assume-se nesse momento que os pontos $P_1 = (x_1, y_1, T(x_1, y_1))$, $P_2 = (x_2, y_2, T(x_2, y_2))$ e $P_3 = (x_3, y_3, T(x_3, y_3))$ pertencem a superfície, Fig. 7, que geram a temperatura ao longo da placa, e com $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{L}{2}$, $x_3 = L$, e $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{H}{2}$, $y_3 = H$. Para simplificar a notação considera-se que $z_1 = T(x_1, y_1)$, $z_2 = T(x_2, y_2)$ e $z_3 = T(x_3, y_3)$.

O mesmo argumento apresentado nos próximos dois parágrafos pode ser efetuado com quaisquer três pontos da superfície ao longo de uma variável constante. É fato que quanto menor for a distância entre os pontos, $\Delta x = \frac{L}{2^n}$ e $\Delta y = \frac{H}{2^n}$, melhor há de ser a aproximação parabólica e as considerações refletir-se-ão com maior exatidão a realidade, possibilitando a tomada de decisões mais coerente com a especificidade de cada problema.

Tabela 3. Coeficientes da curva com $y = \text{constante}$.



A coordenada y_{fixo} é fixa				
$z = a.x^2 + b.x + c$				
Coeficientes			Coordenadas do Vértice (x_v, y_c, z_v)	
$a = \frac{2.z_1 - 4.z_2 + 2.z_3}{L^2}$	$b = \frac{-3.z_1 + 4.z_2 - z_3}{L}$	$c = z_1$	$\left(\frac{-b}{2.a}; y_c; \frac{-b^2 + 4.a.c}{4.a}\right)$	
Vetor tangente em $P = (x, y_{fixo}, T(x, y_{fixo}))$ $y_{fixo} = y_i, \quad i = 1, 2, 3$			$v_t = (1, y_{fixo}, 2.a.x + b)$	
	$a > 0$		$a < 0$	
$x < \frac{-b}{2.a}$	z é crescente	x_v é ponto de máximo e z_v é o valor máximo	z é decrescente	x_v é ponto de mínimo e z_v é o valor mínimo
$x > \frac{-b}{2.a}$	z é decrescente		z é crescente	
Gráfico				

A Tabela 3 expõe a parábola nos planos $y = y_1$ ou $y = y_2$ ou $y = y_3$, cuja equação possui a forma $z = a.x^2 + b.x + c$. E os coeficientes são determinados por substituição dos pontos P_1 , P_2 e P_3 , e a resolução de um sistema linear de equações. Portanto, os coeficientes são definidos pelas igualdades $a = \frac{2.z_1 - 4.z_2 + 2.z_3}{L^2}$, $b = \frac{-3.z_1 + 4.z_2 - z_3}{L}$, $c = z_1$.

E a Tabela 4 expõe a parábola nos planos $x = x_1$ ou $x = x_2$ ou $x = x_3$, cuja equação possui a forma $z = a_1.y^2 + b_1.y + c_1$. E os coeficientes são determinados por substituição dos pontos P_1 , P_2 e P_3 , e a resolução de um sistema linear de equações. Portanto, os coeficientes são gerados pelas igualdades $a = \frac{2.z_1 - 4.z_2 + 2.z_3}{H^2}$, $b = \frac{-3.z_1 + 4.z_2 - z_3}{H}$, $c = z_1$.

Tabela 4. Coeficientes da curva com $x = \text{constante}$.

A coordenada x_{fixo} é fixa				
$z = a_1.y^2 + b_1.y + c_1$				
Coeficientes			Coordenadas do Vértice (x_{fixo}, y_v, z_v)	
$a_1 = \frac{2.z_1 - 4.z_2 + 2.z_3}{H^2}$	$b_1 = \frac{-3.z_1 + 4.z_2 - z_3}{H}$	$c_1 = z_1$	$\left(x_{fixo}; \frac{-b_1}{2.a_1}; \frac{-b_1^2 + 4.a_1.c_1}{4.a_1} \right)$	

Vetor tangente em $P = (x_{fixo}, y, T(x_{fixo}, y))$ $x_{fixo} = x_i, \quad i = 1, 2, 3$			$v_t = (x_{fixo}; 1; 2.a_1 y + b_1)$	
$a > 0$			$a < 0$	
$y < \frac{-b_1}{2.a_1}$	z é crescente	y_v é ponto de máximo e z_v é o valor máximo	z é decrescente	y_v é ponto de mínimo e z_v é o valor mínimo
$y > \frac{-b_1}{2.a_1}$	z é decrescente		z é crescente	
Gráfico				

Com essa linha de raciocínio pode-se fazer algumas considerações a cerca da variação da temperatura ao longo dos pontos de cada uma das curvas quando x ou y são constantes.

As ideias expostas anteriormente direciona a um raciocínio semelhante, porém, com as coordenadas um pouco diferentes. Suponha que x_{11}, x_{22}, x_{33} são pontos na direção do eixo x compreendidos entre 0 e L , consecutivos, e que a distância entre o sucessor e antecessor seja igual a $\Delta x = \frac{L}{2^n}$.

De modo análogo, y_{11}, y_{22}, y_{33} são pontos na direção do eixo y compreendidos entre 0 e H , consecutivos, e que a distância entre o sucessor e antecessor seja igual a $\Delta y = \frac{H}{2^n}$.

Com notação semelhante considere que $z_{11} = T(x_{11}, y_{11})$, $z_{22} = T(x_{22}, y_{22})$ e $z_{33} = T(x_{33}, y_{33})$. Para um determinado valor de x ou de y fixos obtém-se uma parábola na direção perpendicular a considerada constante, a saber, $z = a.x^2 + b.x + c$ ou $z = a_1.y^2 + b_1.y + c_1$.

Cada ponto gera uma equação do primeiro grau que origina o sistema, em notação matricial, expresso pela igualdade na Eq. (3).

$$\begin{bmatrix} x_{11}^2 & x_{11} & 1 \\ x_{22}^2 & x_{22} & 1 \\ x_{33}^2 & x_{33} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{22} \\ z_{33} \end{bmatrix} \quad (3)$$

A solução do sistema, em Eq. (3), produz os coeficientes da parábola, que são descritos nas igualdades das Eq. (4), Eq. (5) e Eq. (6).

$$a = \frac{z_{11}}{(x_{22} - x_{11})(x_{33} - x_{11})} - \frac{z_{22}}{(x_{22} - x_{11})(x_{33} - x_{22})} + \frac{z_{33}}{(x_{33} - x_{22})(x_{33} - x_{11})}, \quad (4)$$

$$b = \frac{-z_{11} \cdot (x_{33} + x_{22})}{(x_{22} - x_{11})(x_{33} - x_{11})} + \frac{z_{22} \cdot (x_{33} + x_{11})}{(x_{22} - x_{11})(x_{33} - x_{22})} - \frac{z_{33} \cdot (x_{22} + x_{11})}{(x_{33} - x_{22})(x_{33} - x_{11})}, \quad (5)$$

$$c = \frac{z_{11} \cdot x_{33} \cdot x_{22}}{(x_{22} - x_{11})(x_{33} - x_{11})} - \frac{z_{22} \cdot x_{33} \cdot x_{11}}{(x_{22} - x_{11})(x_{33} - x_{22})} + \frac{z_{33} \cdot x_{22} \cdot x_{11}}{(x_{33} - x_{22})(x_{33} - x_{11})}. \quad (6)$$

Com os valores dos coeficientes a análise aproximada para a curva de temperatura entre os pontos (x_{11}, y_{11}, z_{11}) , (x_{22}, y_{22}, z_{22}) e (x_{33}, y_{33}, z_{33}) é descrito pela parábola $z = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Contudo, observa-se que a medida que são acrescidos termos a malha o valor absoluto do denominador dos coeficientes cresce, consequentemente os coeficientes tendem a zero.

Por outro lado, o denominador pode ser reescrito em função de Δx e os coeficientes passam a ter maior contribuição dos valores numéricos de z_{11} , z_{22} , e z_{33} . Colaborando para que as análises possam ser aferidas pelo valor numérico da temperatura nos pontos da malha definida.

Quando os cortes são observados em planos paralelos ao eixo y, ou seja, a coordenada x é uma constante, obtém-se um sistema de equações definido de acordo com a Eq. (7), cuja solução é semelhante as obtidas em relação a y, porém, ao invés de y deve-se utilizar o valor de x.

$$\begin{bmatrix} y_{11}^2 & y_{11} & 1 \\ y_{22}^2 & y_{22} & 1 \\ y_{33}^2 & y_{33} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{22} \\ z_{33} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Dessa forma é possível avaliar o que ocorre com a variação de temperatura ao longo da placa de dimensões H e L, valendo-se dos valores da temperatura determinadas com o MDF.

Quando são feitos cortes no sentido das direções principais, x e y, as igualdades em Eq. (4), Eq. (5) e Eq. (6) definem os parâmetros de uma parábola, e as Tabela 3 e Tabela 4 apresentam formas de determinar as regiões de crescimento ou decrescimento da temperatura, indicando que a geometria pode ser simplificada, ou até mesmo modificada e mesmo assim ser avaliada por um ramo de uma parábola.

7 DISCUSSÕES, ANÁLISE E INTERPRETAÇÃO DOS DADOS

Existe uma grande dificuldade em compreender o conceito matemático de função, este formalismo aliado a uma notação matemática específica, pode e às vezes deixa obscuro o real significado da relação existente entre os elementos de dois conjuntos, a qual denominamos função.

Essas dificuldades às vezes surgem em incompatibilidades de interpretação das variáveis existentes no mundo real e do mundo da ciência matemática. Faz-se necessário observar que a ciência matemática trabalha conceitos com variáveis contínuas. Neste sentido os *softwares* possuem uma característica que se adapta ao mundo real, seus conceitos são matemáticos, mas são descritos com variáveis discretas, as quais em sua maioria representam os problemas do cotidiano.

Nesta pesquisa foi proposto uma metodologia para tratamento de dados de problemas reais que podem ser trabalhados com a equação de Laplace. Apresentou a implementação de uma *function* para avaliar o valor da temperatura em um ponto da malha com o MDF, e aferir a margem de erro entre os dados numéricos com o MDF e a solução analítica em cada ponto da malha.

8 CONCLUSÕES, RECOMENDAÇÕES E PERSPECTIVAS

A computação algébrica foi realizada com o *software* MatLab, que possui um vasto menu de comandos pré definidos e a possibilidade de que o usuário possa elaborar suas próprias rotinas de cálculos valendo-se de conceitos pertinentes a programação.

O *software* MatLab oportuniza agilidade nos cálculos e a implementação de uma rotina de comandos com a criação de uma *function*, um arquivo com a extensão .m que pode ser executado diversas vezes e o usuário necessita somente fornecer os dados fundamentais do problema, nesse caso, foram o comprimento e a largura da placa e a quantidade de termos na solução analítica expressa pela série.

Destaca-se nesta pesquisa como fator diferencial a *function* elaborada. Atua como instrumento facilitador para os cálculos no que tange a quantidade de termos na série da solução analítica, a determinação e visualização bidimensional da malha, o cálculo e a visualização tridimensional do valor numérico da temperatura nos pontos da malha e com a quantidade de termos pré definida, além de possibilitar um conjunto de dados para análise, discussão e fundamentar a tomada de decisões.

Constitui-se uma forma de análise que é implementada inicialmente com a solução da equação de Laplace, com condições de contorno variável em uma única borda, e pode se testar a ideia da superposição de resultados.

9 AGRADECIMENTOS

Agradecemos às instituições financiadoras Universidade Estadual de Goiás e a UniEVANGÉLICA, ao professor Lineu José Pedroso que orientou, dedicou tempo e incentivou incondicionalmente a realização desse trabalho.

REFERÊNCIAS

Alves, Arileide Cristina, 2010. Verificação de Soluções Numéricas de Equação de Laplace 2D com Malhas Triangulares e Múltiplas Extrapolações de Richardson. Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFPR.

Burden, Richard L., Faires, J. Douglas, 2003. *Análise Numérica*. São Paulo. Pioneira Thomson Learning.

Cervo, Amado Luiz, 2002. *Metodologia Científica*, 5ª edição, São Paulo. Prentice Hall, p.67.

Cindra, José L., Teixeira, Odete P. B., 2010. *Calor e Temperatura e suas Explicações por Intermédio de um Enfoque Histórico*. Disponível na URL http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/fisica/artigos/calor_temp_explic_hist.pdf, acesso em 06/01/2015 as 18h00min.

Coelho, Nailde A., Pedroso, Lineu J., 2013. *Relatórios Técnicos de Pesquisa - RTP - NAC1 - 2013*. Brasília DF.

Hanselman, D. , Littlefield, B., 1999. *MatLab 5 versão para estudante – guia do usuário*. São Paulo, Makronbooks.

Hickmann, Tásia. Gramani, Liliana. Kaviski, Eloy. Garcia, Everton, 2015. *Solução Analítica e numérica da equação da condução de calor aplicada a barragem de concreto*. Disponível na URL http://www.cbdb.org.br/xxxxsngb/download/trabalhos_tecnicos/tema112/SOLU%C3%87%C3

%83O%20ANAL%C3%8DTICA%20E%20NUM%C3%89RICA%20DA%20EQUA%C3%87%C3%83O%20DA%20CONDU%C3%87%C3%83O%20DE%20CALOR%20APLICADA%20A%20BARRAGEM%20DE%20CONCRETO.pdf, acesso em 18/09/2015 as 14h30min.

Iório, Valéria, 1991. *EDP - Um Curso de Graduação*. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA).

Mamede, Flávio. Pedroso, Lineu J., 2016. *Relatórios Técnicos de Pesquisa - RTP - FM - 2016*. Brasília DF.

Martins, Eliane de Fátima R.. Pedroso, Lineu J., 2016. *Relatórios Técnicos de Pesquisa - RTP - EFRM - 2016*. Brasília DF.

Pedroso, L. J.;2005. *Método das diferenças finitas em vigas esbeltas*. In: Apostilha Didática. Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil–PECC-GDFE, UnB, Brasil.

Pedroso, L. J.;2011. *Uma Introdução ao Método das Diferenças Finitas Centrais*. In: Apostilha Didática. Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil – PECC - GDFE, Universidade de Brasília, Brasil.

Pedroso, L. J.; 2015. Manuscritos, esquemas, discussões e notas de seções de orientações, 2015-2016. In: Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil – PECC - GDFE, Universidade de Brasília, Brasil.

Szilard, Rudolph, 1974. *Theory and Analysis of Plates Classical And Numerical Methods*. Prentice - Hall, INC., Englewood Cliffs, New Jersey.